Aspects algorithmiques de la combinatoire

Examen du 10 mars 2015 – durée : 2,5 heures

Première Partie - 10 points

Notes de cours autorisées

Question 1 Soit $\overline{pp}(n)$ le nombre de couples de *surpartitions* $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ avec

$$n = \sum_i \lambda_i^{(1)} + \sum_j \lambda_j^{(2)}.$$

Par exemple, $(\overline{5} + 5 + 5 + \overline{3} + 2, 11 + 6 + 6 + 6 + \overline{1})$ est un couple de surpartitions compté par $\overline{pp}(50)$, avec $\lambda^{(1)} = \overline{5} + 5 + 5 + \overline{3} + 2$ et $\lambda^{(2)} = 11 + 6 + 6 + 6 + \overline{1}$.

(a). (3 points) Prouver que

$$\overline{pp}(3n + 2) \equiv 0 \pmod 3.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geqslant 0} \overline{pp}(n) q^n &= \frac{(-q)_\infty^2}{(q)_\infty^2} \\
&= \frac{(-q)_\infty^2 (q)_\infty}{(q)_\infty^3} \\
&\equiv \frac{(-q)_\infty^2 (q)_\infty}{(q^3; q^3)_\infty} \pmod 3 \\
&= \frac{1}{(q^3; q^3)_\infty} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\binom{n+1}{2}},
\end{aligned}$$

grâce au produit triple. Puisque $n(n + 1)/2 \not\equiv 2 \pmod 3$, on a $\overline{pp}(3n + 2) \equiv 0 \pmod 3$.

(b). (2 points) Soit $\overline{pp}_3(n)$ le nombre de couples de surpartitions comptés par $\overline{pp}(n)$ tels que : (i) $\lambda^{(1)}$ n'a pas de parts surlignées et ses parts non-surlignées sont ± 1 modulo 6, (ii) les parts surlignées dans $\lambda^{(2)}$ sont des multiples de 3. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 0} \overline{pp}_3(n) q^n = \frac{(-q; q)_\infty}{(q; q)_\infty}.$$

Solution. La fonction génératrice des surpartitions $\lambda^{(1)}$ est

$$\frac{1}{(q; q^6)_\infty (q^5; q^6)_\infty}$$

et celle des surpartitions $\lambda^{(2)}$ est

$$\frac{(-q^3; q^3)_\infty}{(q)_\infty}.$$

La fonction génératrice des couples $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ est donc

$$\begin{aligned}\frac{(-q^3;q^3)_\infty}{(q;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty(q)_\infty} &= \frac{1}{(q;q^6)_\infty(q^3;q^6)_\infty(q^5;q^6)_\infty(q)_\infty}\\ &= \frac{1}{(q;q^2)_\infty(q)_\infty}\\ &= \frac{(-q)_\infty}{(q)_\infty}.\end{aligned}$$

Question 2

(a). (1 point) Montrer que

$$\frac{(b;q)_n}{(c;q)_n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(c/b;q)_j(q^{-n};q)_j(bq^n)^j}{(q;q)_j(c;q)_j}.$$

Solution. Dans l'identité q-Pfaff-Saalschutz,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(a)_j(b)_j(q^{-n})_j q^j}{(q)_j(c)_j(abq^{1-n}/c)_j} = \frac{(c/a)_n(c/b)_n}{(c)_n(c/ab)_n},$$

on laisse $b \to \infty$ puis on pose $a = c/b$.

(b). (2 points) Utiliser (a) pour prouver que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(a;q)_n(b;q)_n z^n}{(q;q)_n(c;q)_n} = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \sum_{j\geqslant 0} \frac{(a;q)_j(c/b;q)_j(-bz)^j q^{j(j-1)/2}}{(q;q)_j(c;q)_j(az;q)_j}.$$

(Le fait que

$$(q^{-n-j};q)_j = \frac{(q;q)_{n+j}}{(q;q)_n}(-1)^j q^{-j(j+1)/2-jn}$$

sera utile.)

Solution. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_n(b)_nz^n}{(q)_n(c)_n} &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_nz^n}{(q)_n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(c/b)_j(q^{-n})_j(bq^n)^j}{(q)_j(c)_j}\\
&= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{n\geqslant j}\frac{(a)_nz^n}{(q)_n}\frac{(c/b)_j(q^{-n})_j(bq^n)^j}{(q)_j(c)_j}\\
&= \sum_{j\geqslant 0}\frac{(c/b)_jb^j}{(q)_j(c)_j}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_{n+j}z^{n+j}(q^{-n-j})_jq^{(n+j)j}}{(q)_{n+j}}\\
&= \sum_{j\geqslant 0}\frac{(c/b)_j(-bz)^jq^{\binom{j}{2}}}{(q)_j(c)_j}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(aq^j)_nz^n}{(q)_n}\\
&= \sum_{j\geqslant 0}\frac{(c/b)_j(-bz)^jq^{\binom{j}{2}}}{(q)_j(c)_j}\frac{(azq^j)_\infty}{(z)_\infty}\\
&= \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}\sum_{j\geqslant 0}\frac{(a)_j(c/b)_j(-bz)^jq^{j(j-1)/2}}{(q)_j(c)_j(az)_j}.\end{aligned}$$

(c). (2 points) Utiliser (b) avec l'identité q-Kummer pour déduire que

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a;q)_n(q/a;q)_nb^nq^{n(n-1)/2}}{(q^2;q^2)_n(b;q)_n} = \frac{(ab;q^2)_\infty(bq/a;q^2)_\infty}{(b;q)_\infty}.$$

Solution. On pose $b = ab/q$, $c = b$, et $z = -q/a$ dans (b) et on obtient

$$\sum_{j\geqslant 0}\frac{(a)_j(q/a)_jb^jq^{j(j-1)/2}}{(q^2;q^2)_j(b)_j} = \frac{(-q/a)_\infty}{(-q)_\infty}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_n(ab/q)_n(-q/a)^n}{(q)_n(b)_n}.$$

Puis on applique le cas $b = ab/q$ de l'identité q-Kummer,

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a)_n(b)_n(-q/a)^n}{(q)_n(bq/a)_n} = \frac{(-q)_\infty(bq^2/a^2;q^2)_\infty(bq;q^2)_\infty}{(bq/a)_\infty(-q/a)_\infty}.$$