EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES III

1. Soit $p_2(n)$ le nombre de couples de partitions $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ telles que

$$n = \sum_i \lambda_i^{(1)} + \sum_j \lambda_j^{(2)}.$$

Par exemple, $p_2(2) = 5$, les couples de partitions étant $(\emptyset, 2)$, $(1, 1)$, $(\emptyset, 1+1)$, $(1+1, \emptyset)$, et $(2, \emptyset)$. (On note $\emptyset$ la partition vide.) Prouver que

$$p_2(5n+2) \equiv p_2(5n+3) \equiv p_2(5n+4) \equiv 0 \pmod 5.$$

2. Soit $\ell(\lambda)$ la plus grande part d'une partition λ. Soit $M_2(t, m, n)$ le nombre de couples comptés par $p_2(n)$ tels que $\ell(\lambda^{(1)}) - \ell(\lambda^{(2)}) \equiv t \pmod m$. Montrer que pour $k = 2, 3$ ou 4 et $0 \leq t \leq 4$ on a

$$M_2(t, 5, 5n+k) = \frac{1}{5} p_2(5n+k).$$